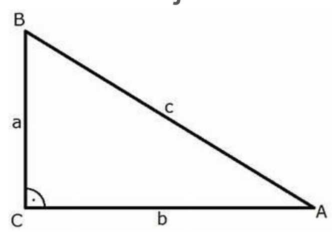
A Pitagorasz tétel a geometria, sőt talán a matematika egyik legközismertebb tétele, amely a derékszögű háromszög oldalai közötti összefüggést mondja ki.

Pitagorasz tétele:

A derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területeinek összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével.

A derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

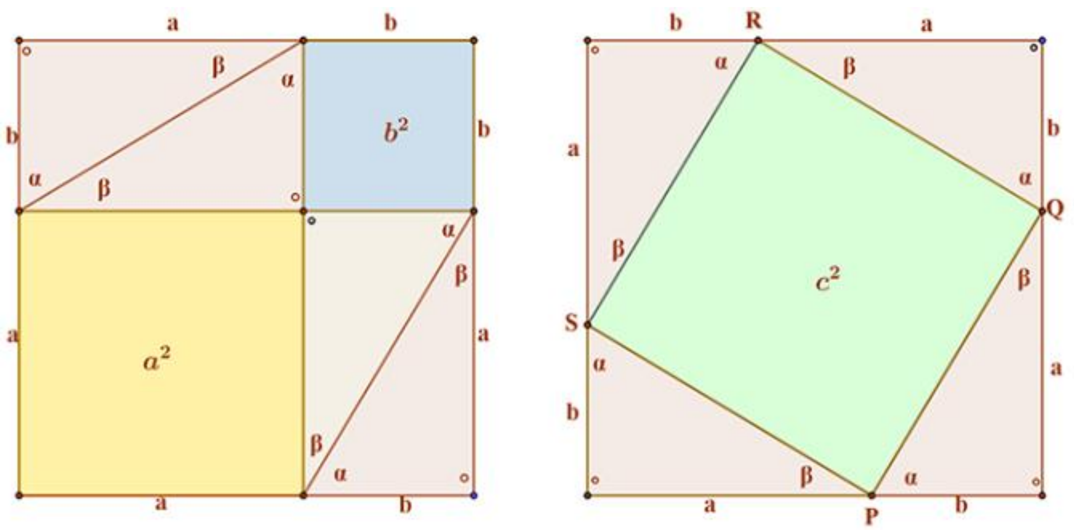
A mellékelt ábra jelölései szerint: $a^2 + b^2 = c^2$.



A tétel bizonyítása:

Készítsünk két darab $(a + b)$ oldalú négyzetet az alábbi módokon, ahol „**a**" és „**b**" a derékszögű háromszög befogói! A két darab $(a + b)$ oldalú négyzetek területe nyilvánvalóan egyenlő.

A tétel bizonyításában felhasználjuk azt az euklideszi axiómát, hogy *„Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, akkor a maradékok is egyenlők."*



A fenti baloldali négyzetben kaptunk 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszöget, és egy „a” illetve „b” oldalú négyzetet. Ezek területe a^2 és b^2 területegység.

A jobboldali négyzetben is megtalálható ez a 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszög, amelynek átfogója „**c”**. Így tehát a középső $PQRS$ síkidom minden oldala „c”. Be kell még látni, hogy csúcsainál derékszög van. Mivel az eredeti háromszögben $\alpha + \beta = 90°$, ezért ennek a síkidomnak minden szögére $180° - (\alpha + \beta) = 90°$. Tehát a $PQRS$ síkidom négyzet, területe pedig c^2.

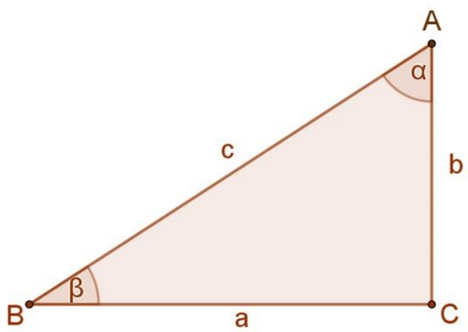
Ha mindkét négyzetből elvesszük a 4 darab derékszögű háromszöget, a maradékok területe is egyenlő, azaz $a^2 + b^2 = c^2$.

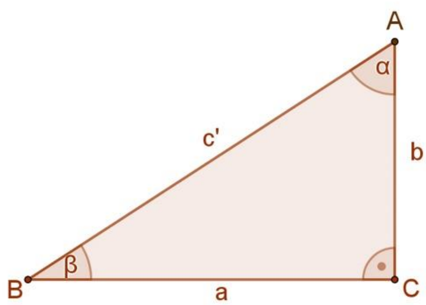
A tétel megfordítása:

Ha egy háromszög két oldalára emelt négyzetek területének összege egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet területével, akkor a háromszög derékszögű.

Bizonyítás:

Legyen adott egy ABC háromszög, amelynek oldalaira teljesül, hogy két oldalára emelt négyzetek területének összege egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet területével. A mellékelt ábra jelölései szerint: $a^2 + b^2 = c^2$. Be kell bizonyítani, hogy az ABC háromszög derékszögű.





Vegyünk most fel egy „**a**” és „**b**” befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogóját jelöljük „**c’’**-vel. Erre a háromszögre teljesül a Pitagorasz-tétel, tehát $a^2 + b^2 = c^2$.

A két összefüggés csak akkor lehet egyszerre igaz, ha $c^2 = c'^2$.

Ez viszont azt jelenti, hogy a két háromszög egybevágó, tehát az eredeti ABC háromszög is derékszögű.

Megjegyzés: Ha „c" jelöli a leghosszabb oldalt, és

- a háromszögben $a^2 + b^2 > c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű.
- a háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű.
- a háromszögben $a^2 + b^2 < c^2$, akkor a háromszög tompaszögű.